J. Math. and Its Appl.
ISSN: 1829-605X
Vol. 6, No. 1, May 2009, 25–33

SUPER EDGE-MAGIC PADA GRAF YANG MEMUAT BEBERAPA *CYCLE* GANJIL

Suhud Wahyudi, Chairul Imron
Jurusan Matematika, FMIPA ITS Surabaya
suhud@matematika.its.ac.id, imron-its@matematika.its.ac.id

Abstrak

Total edge-magic graph G adalah pemetaan bijektif $f : V \cup E \rightarrow 1, 2, 3, \cdots, p + q$ sedemikian hingga $f(u) + f(e) + f(v)$ adalah konstan tidak tergantung dari $e = (u, v) \in E$. *Total edge-magic graph* G dikatakan *super edge-magic* jika $f(V(G)) = 1, 2, 3, \cdots, p$. Dalam hal ini sifat *super edge-magic* dimiliki oleh beberapa graf yang memuat *cycle* ganjil. Salah satunya adalah graf planar $(P_2 \cup kK_1) + N_2$ dengan $k \geqslant 1$.

Dalam makalah ini dikembangkan suatu teorema baru tentang keberlakuan *planar graph* $(P_2 \cup kK_1) + N_2$ dari P_2 menjadi $P_{2n}, n = 1, 2, \cdots$. Juga ditunjukkan range dari konstanta magic *total edge-magic labeling graph* $(P_2 \cup kK_1)(+)N_2$.
Katakunci: *Total edge-magic, super edge-magic, consecutive.*

1. Pendahuluan

graf adalah suatu cabang dari matematika yang pada akhir-akhir ini berkembang pesat. Salah satu bagian dari graf yang banyak diminati adalah *graph labeling. graph labeling* adalah pemberian nilai (integer positif) pada *vertex, edge,* atau *vertex* dan *edge.* Ada beberapa macam *labeling*, yaitu *labeling* yang domainnya berupa himpunan *vertex*, himpunan *edge*, atau keduanya, dan dinamakan dengan *vertex labeling, edge labeling* dan *total labeling.*

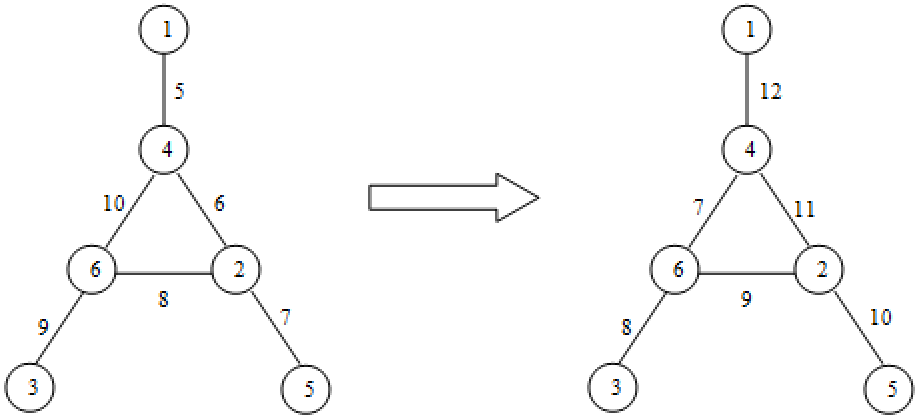
Penelitian labeling pertama kali dinamakan *magic valuation* yang dikenalkan oleh A.Kotzig dan A.Rosa (1970) dan berkembang sampai sekarang dengan berbagai macam nama. Salah satu jenis graph labeling adalah *magic labeling* yaitu *vertex labeling* dan *edge labeling* dari suatu graf dengan himpunan bilangan integer positif yang memenuhi sifat penjumlahannya adalah konstan.

Total edge-magic labeling dari $(p, q) - graph$ G adalah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to 1, 2, 3, \cdots, p + q$ sedemikian hingga untuk setiap $xy \in E(G)$ dengan $x, y \in V(G)$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k,$ k adalah suatu konstanta. Konstanta k disebut bilangan ajaib [7]. Jika G mempunyai sifat *total edge-magic labeling*, maka G disebut *total edge-magic graph. Super edge-magic labeling* dari $(p, q) - graph$ G adalah fungsi bijektif $f : V(G) \cup E(G) \to 1, 2, 3, \cdots, p$ sedemikian hingga untuk setiap $xy \in E(G)$ dengan $x, y \in V(G)$ berlaku $f(x) + f(xy) + f(y) = k,$ k adalah suatu konstanta, dan memenuhi sifat $f(V(G)) = 1, 2, 3, \cdots, p$. Konstanta k disebut bilangan ajaib [3]. Jika G mempunyai sifat *super edge-magic labeling,* maka G disebut *super edge-magic graph.*

Pengkajian mengenai *total edge-magic graph* dan *super edge-magic graph* secara kontinu telah dilakukan. Misalnya Craft dan Tesar [2] serta Godbord dan Slater [6] menunjukkan bahwa semua *cycle* adalah *total edge-magic.* Sedangkan Enomoto dkk. [3] menunjukkan bahwa *graph cycle* adalah *super edge-magic* jika dan hanya jika n ganjil. Sin-Min Lee dan Alexander Nien-Tsu Lee [8] menunjukkan bahwa graf planar $(P_2 \cup hK_1) + N_2, h \geqslant 1$, adalah *super edge-magic.*

Sebuah himpunan bagian S dari bilangan integer dikatakan *consecutive* jika S terdiri atas bilangan integer yang berurutan. Chen [1] menunjukkan bahwa sebuah graf G adalah *super edge-magic* jika dan hanya jika terdapat suatu *vertex labeling* f sedemikian hingga dua himpunan $f(V(G))$ dan $f(u) + f(v) : (u, v) \in E(G)$ keduanya adalah *consecutive.* Secara terpisah Figueroa-Centeno dkk. [5] juga memberikan hasil yang sama. Mereka menunjukkan bahwa jika $f : V(G) \to 1, 2, 3, \cdots, p$ adalah fungsi bijektif dari $(p, q) - graph$ G dan $S = f(u) + f(v) : uv \in E$ adalah *consecutive* dengan

$s = min(S)$, maka f dapat diperluas menjadi *super edge-magic labeling* dari G didefinisikan oleh $f(uv) = p + q + s - f(u) - f(v)$ untuk semua *edge* $uv \in E(G)$. Jadi jelaslah bahwa untuk menunjukkan *super edge-magic labeling graph* cukup dengan *vertex labeling* yang menyebabkan *concecutive*. Contoh dari *concecutive labeling* yang menyebabkan *super edge-magic labeling* dapat dilihat pada Gambar 1.



Consecutive labeling *Super edge-magic labeling.*

Gambar 1: *Consecutive Labeling* dan *Super Edge-Magic Labeling*

Suatu graf G dikatakan terhubung jika dapat dibuat lintasan yang menghubungkan setiap dua *vertex* pada graf tersebut. *Graph* terhubung yang membentuk *cycle* disebut *graph cycle* dilambangkan dengan C_n, sedangkan graf terhubung yang tidak mengandung *cycle* disebut graf pohon. Salah satu bentuk khusus dari graf pohon adalah graf lintasan dilambangkan dengan P_n. Graf yang setiap *vertex*nya terhubung dinamakan graf komplit dilambangkan dengan K_n. Graf yang hanya terdiri dari simpul-simpul saja sebanyak m dinamakan *graph Number* dilambangkan dengan N_m [9]

2. Graf yang Memuat Beberapa *Cycle* Ganjil

Suatu graf yang didalamnya memuat *cycle* ganjil dapat dibangun oleh beberapa graf dengan operasi-operasi tertentu. Dalam hal ini operasi yang digunakan adalah $\cup$, $+$ atau $(+)$. Untuk operasi $\cup$ dan $+$ dapat dilihat pada [9], sedangkan untuk operasi (+) akan didefinisikan pada graf terkait. Misalkan $P_{2n}(+)N_m$ adalah graf dengan $p = 2n + m$ dan $q = 2(m + n) - 1$.

$$V(P_{2n}(+)N_m) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2n}, y_1, y_2, \ldots, y_m\}.$$

dengan

$$V(P_{2n}) = \{v_1, v_2, \cdots, v_{2n}\}$$

dan

$$V(N_m) = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}.$$

$$E(P_{2n}(+)N_m) = E(P_{2n} \cup \{(v_1, y_1), (v_1, y_2), \cdots, (v_1, y_m)\}, \{(v_{2n}, y_1), (v_{2n}, y_2) \\ \cdots, (v_{2n}, y_m)\}).$$

[5] menunjukkan bahwa $P_2(+)N_m$ *super edge-magic* untuk semua $m \geqslant 1$. Dalam hal ini Sin-Min Lee dan Alexander Nien-Tsu Lee [8] mengembangkan keberlakuan P_2 menjadi P_{2n} seperti yang ditunjukkan dalam teorema berikut

Teorema 2.1 *Graf $P_{2n}(+)N_m$ adalah super edge-magic untuk semua $n, m \geqslant 1$ [8]*

Graf planar $(P_2 \cup hK_1) + N_2$ adalah graf dengan $p = h + 4$ dan $2h + 5$.

$$V((P_2 \cup hK_1) + N_2) = \{z_1, z_2, x_1, x_2 \cdots, x_h, y_1, y_2\}$$

dengan

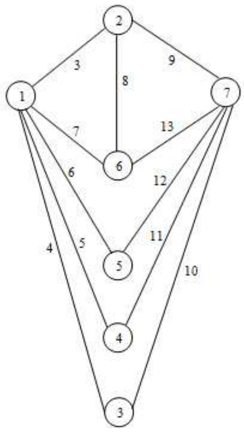
$$V(P_2) = \{z_1, z_2\}, V(hK_1) = \{x_1, x_2, \cdots x_h\}, V(N_2) = \{y_1, y_2\}$$

dan

$$E((P_2 \cup hK_1) + N_2) = \{(z_1, z_2), (z_1, y_1), (z_2, y_1), (z_1, y_2), (z_2, y_2), (x_1, y_1), \\ (x_2, y_1), \cdots, (x_h, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), \cdots, (x_h, y_2)\}.$$

Graf planar $(P_2 \cup hK_1) + N_2$ ini memuat $2C_3$ dan hC_4.

Teorema 2.2 *Untuk $h \geqslant 1$, graf planar $P_2 \cup hK_1) + N_2$ adalah super edge-magic[8]*



Gambar 2: *Consecutive labeling* yang menyebabkan *Super edge-magic labeling* dari $P_2 \cup hK_1 + N_2$

Contoh 2.3 *Consecutive labeling yang menyebabkan super edge-magic labeling dari* $(P_2 \cup hK_1) + N_2$ *ditunjukkan pada Gambar 2*

Graf $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2, n = 1, 2, 3, \cdots$ adalah *graph* dengan $p = 2n + h + 2$ dan $q = 2n + 2h + 3$.

$$V((P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2) = \{z_1, z_2, \cdots, z_{2n}, x_1, x_2, \cdots, x_h, y_1, y_2\}$$

dengan

$$V(P_{2n}) = \{z_1, z_2, ..., z_{2n}\}, V(hK_1) = \{x_1, x_2, \cdots x_h\}, V(N_2) = \{y_1, y_2\}$$

dan

$$\begin{aligned} E((P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2) = \quad & E(P_{2n}) \cup \{(z_1, y_1), (z_{2n}, y_1), (z_1, y_2)(z_{2n}, y_2), (x_1, y_1), \\ & (x_2, y_1), \cdots, (x_h, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2), \cdots, (x_h, y_2)\}. \end{aligned}$$

Graf ini mempunyai $2C_{2n+1}$ dan hC_4.

Gambaran secara umum dari graf $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2$ dapat dilihat pada Gambar 3.

Teorema 2.4 *Graf* $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2, n = 1, 2, 3, \cdots$ *adalah graf super edge magic.*

Bukti Didefinisikan labeling $f : V((P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2) \rightarrow \{1, 2, 3, \cdots, 2(n+1)+h\}$ sebagai berikut :

$$f(r) = \begin{cases} 1 & r = y_1 \\ 2(n+1)+k & r = y_2 \\ (n+1) - \int(t/2) & r = z_t, t = 1, 3, 5, ..., 2n-1 \\ 2(n+1)+k-\frac{u}{2} & r = z_u, u = 2, 4, 6, ..., 2n \\ n+s+1 & r = x_s, s = 1, 2, 3, ..., k \end{cases}.$$

Jelas bahwa f akan menyebabkan consecutive labeling pada setiap edge dari $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2$. Jadi $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2$ adalah super edge-magic. Teorema 2.4 adalah pengembangan dari Teorema 2.2 (yang dihasilkan Sin-Min Lee dan A. Nien-Tsu Lee[8].Hal ini dapat ditunjukkan sebagai berikut: Ambil $n = 1$, Teorema 2.4 akan berbentuk $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2$ dengan

$$V((P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2) = \{z_1, z_2, x_1, x_2, \cdots, x_h, y_1, y_2\}$$

dan

$$\begin{aligned} E((P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2) = \quad & \{(z_1, z_2), (z_1, y_1), (z_2, y_1), (z_2, y_2), (x_1, y_1), \\ & (x_2, y_1), \cdots (x_h, y_1), (x_1 y_2), (x_2, y_2), \cdots (x_h, y_2)\} \end{aligned}$$

dimana keadaan ini sama dengan $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2$. Jadi Teorema 2.2 adalah keadaan khusus dari Teorema 2.4 dengan $n = 1$.

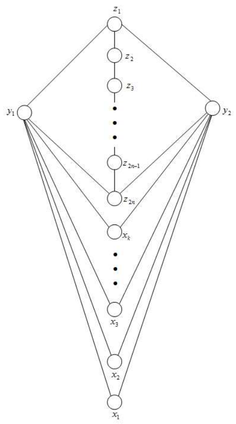
Contoh 2.5 *Super edge-magic dari* $(P_4 \cup 3K_1)(+)N_2$ *dan* $(P_6 \cup 5K_1)(+)N_2$ *ditunjukkan pada Gambar 3 dan Gambar* **??**.

3. Range dari Konstanta Magic

Range dari konstanta magic yang akan dibahas disini adalah range dari *total edge-magic labeling graph* $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2, n = 1, 2, 3, \cdots$ seperti yang ditunjukkan dalam teorema-teorema berikut :

Teorema 3.1 *Graf* $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2, n = 1, 2, 3, \cdots$ *adalah edge-magic total labeling dengan range dari konstanta magicnya.*

$$\frac{10n^2 + 5h^2 + 27n + 22h + 14nh + 25}{2n + 2h + 3} \leqslant k \leqslant \frac{14n^2 + 13h^2 + 45n + 41h + 28nh + 29}{2n + 2h + 3}$$



Gambar 3: graf $(P_2 \cup hK_1)(+)N_2$

Bukti Misalkan S_v: jumlah —textitlabel vertex dan S_e: jumlah *label edge* dalam *edge-magic total labeling* f dengan konstanta *magic* h di G. Jumlah *vertex* di G adalah $p = 2n + h + 2$ dan jumlah *edge* di G adalah $q = 2n + 2h + 3$, sehingga jumlah konstanta *magic* h di G adalah :

$$\begin{aligned}
(2n + 2h + 3)k \quad &= 2S_v + S_e + (label)z_1 + (label)z_{2n} + h(label)y_1 + (label)y_2 \\
&= 1 + 2 + \cdots + (4n + 3h + 5) + \\
&\quad S_v + (label)z_1 + (label)z_{2n} + h(label)y_1 + (label)y_2 \\
&= \frac{(4n + 3h + 5)(4n + 3h + 6)}{2} + \\
&\quad S_v + (label)z_1 + (label)z_{2n} + h(label)y_1 + (label)y_2
\end{aligned}$$

Label kecil pada *vertex* $S_v = 1 + 2 + \cdots + (2n + h + 2) = \dfrac{(2n + h + 2)(2n + h + 3)}{2}$ ambil *label* terkecil untuk y_1, y_2 terkecil yaitu $1, 2$ dan z_1, z_{2n} terkecil yang lain yaitu $3, 4$ sehingga persamaan menjadi :

$$(2n+2h+3)k \geqslant \frac{(4n + 3h + 5)(4n + 3h + 6)}{2} + \frac{(2n + h + 2)(2n + h + 3)}{2} + 3h + 7$$

atau

$$k \geqslant \frac{10n^2 + 5h^2 + 27n + 22h + 14nh + 25}{(2n + h + 3)}$$

Label besar pada *vertex* $S_v = (2n+2h+4) + ((2n+2h+5) + \cdots + (4n+3h+5)$

$$= \frac{(2n+h+2)(6n+5h+9)}{2}$$

Ambil *label* terbesar untuk (y_1, y_2) terbesar yaitu $((4n+3h+5), (4n+3h+4))$ dan z_1, z_{2n} terbesar yang lain yaitu $((4n+3h+3), (4n+3h+2))$, sehingga Persamaan (3.1) menjadi :

$$(2n+2h+3)k \leqslant \frac{(4n+3h+5)(4n+3h+6)}{2} + \frac{(2n+h+2)(6n+5h+9)}{2} + h(8n+6h+9) + (8n+6h+5)$$

atau

$$k \leqslant \frac{14n^2+13h^2+45n+41h+28nh+29}{2n+2h+3}$$

jadi

$$\frac{10n^2+5h^2+27n+22h+14nh+25}{2n+2h+3} \leqslant k \leqslant \frac{14n^2+13h^2+45n+41h+28nh+29}{2n+2h+3}$$

4. Kesimpulan

Dari uraian di atas maka dapat diambil kesimpulan yaitu :

1. Graf $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2, n = 1, 2, 3, \cdots$ adalah *super edge-magic*
2. *Super edge-magic planar graph* $(P_2 \cup hK_1) + N_2$ adalah keadaan khusus dari $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2$ dengan mengambil $n = 1$
3. Graf $(P_{2n} \cup hK_1)(+)N_2, n = 1, 2, 3, \cdots$ adalah *edge-magic total labeling* dengan range dari konstanta *magic*nya :

$$\frac{10n^2+5h^2+27n+22h+14nh+25}{2n+2h+3} \leqslant k \leqslant \frac{14n^2+13h^2+45n+41h+28nh+29}{2n+2h+3}$$

Pustaka

[1] Chen, Z., *On super edge-magic graphs*, The Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, Vol. 38, 53-64, 2001.

[2] Craft, D., Tesar, E.H., *On a question by Erdos about edge-magic graphs*, Discrete Mathematics, Vol. 207, 271-276, 1999.

[3] Enomoto, H., Llado, A.S., Nakawigawa, dan Ringel, G., *Super edge-magic graphs*, SUT Journal of Mathematics, Vol. 43, No. 2, 105-109, 1998.

[4] Figueroa-Centeno, R.M., Ichishima,R. dan Muntaner-Batle, F.A., *The place of super edge-magic labelings among other classes of labelings*, Discrete Mathematics, Vol. 231, 153-168, 2001.

[5] Figueroa-Centeno, R.M., Ichishima,R. dan Muntaner-Batle, F.A., *On super edge-magic graphs*, Ars Combinatoria, Vol. 64, 81-96, 2002.

[6] Godbold, R.P., Slater, P.,*All cycles are edge-magic*, Bull. Institute Combinatoric Appl, Vol. 22, 93-97, 1998.

[7] Kotzig, A., Rosa, A.,*Magic valuations of finite graphs*, Canada Math. Bull., Vol. 13, 451-461, 1970.

[8] Lee, S-M., Lee, N-T. A.,*On Super Edge-Magic Graphs with Many Odd Cycles*,Congressus Numerantium, Vol. 163, 65 - 80, 2003.

[9] Yellen, J., Gross, J.L.,*Graph Theory and ITS Aplication*, 2nd ed., Chapman&Hall, USA, 2006.